El grupoide de Weyl

Leandro Vendramin

RESUMEN. Estas notas corresponden a un minicurso dictado en el XXIV Encuentro Rioplatense de Álgebra y Geometría — 60 años de Claude Cibils, Montevideo, Uruguay, en diciembre de 2015. Compilado el 9 de diciembre de 2015 a las 15:50.

Introducción

El grupoide de Weyl fue descubierto por István Heckenberger [**5**]. Si bien este grupoide fue introducido para estudiar álgebras de Nichols, recientemente quedó en evidencia que este nuevo objeto es inmensamente rico y posee muchas conexiones que merecen ser estudiadas en profundidad. Algunas de estas conexiones son: álgebras de Nichols y grupos cuánticos [**6**], superálgebras de Lie y combinatoria de sistemas de raíces [**7**], cluster algebras [**4**], arreglos de hiperplanos [**1**], etc.

En estas notas introduciremos las definiciones básicas, mostraremos algunos ejemplos y discutiremos la estructura de los grupoides de Weyl de rango dos. Nos basaremos en gran parte en los trabajos de Cuntz y Heckenberger [**2, 3**].

1. Definiciones básicas

1.1. Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ se dice una **matriz de Cartan generalizada** si $a_{ii} = 2$ para todo i, $a_{ij} \leqslant 0$ para todo $i \neq j$ y para cada $i \neq j$ con $a_{ij} = 0$ se tiene $a_{ji} = 0$.

1.2. Sean I un conjunto finito, $\mathcal{X}$ un conjunto no vacío, $(r_i)_{i\in I}$ una colección de funciones $r_i\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, y $(A^X)_{X\in\mathcal{X}}$ una colección de matrices de Cartan generalizadas. Un **semigrafo de Cartan** es una upla

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$$

que cumple las siguientes propiedades:

1) $r_i^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ para todo $i \in I$.
2) $a_{ij}^X = a_{ij}^{r_i(X)}$ para todo $i, j \in I$, $X \in \mathcal{X}$.

El **rango** de $\mathcal{C}$ se define como el cardinal de I. Los elementos de $\mathcal{X}$ son los **puntos** de $\mathcal{C}$ y los elementos de I son las **etiquetas** de $\mathcal{C}$.

1.3. Sean $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ y $\mathcal{D} = (J, \mathcal{Y}, (s_j)_{j\in J}, (B^Y)_{Y\in\mathcal{Y}})$ dos semigrafos de Cartan. Un **morfismo** entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es un par (π, α), donde $\pi\colon I \to J$ y $\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ son funciones tales que

$$a_{ij}^X = b_{\pi(i),\pi(j)}^{\alpha(X)} \qquad \text{para todo } i, j \in I,\ X \in \mathcal{X}, \tag{1.3.1}$$

$$\alpha(r_i(X)) = s_{\pi(i)}(\alpha(X)) \qquad \text{para todo } i \in I,\ X \in \mathcal{X}. \tag{1.3.2}$$

1.4. Un semigrafo de Cartan $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ se dice **conexo** si el grupo generado por $\{r_i : i \in I\}$ actúa transitivamente en $\mathcal{X}$.

1.5. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan. Se define el **grafo de intercambio** de $\mathcal{C}$ como el grafo etiquetado cuyos vértices son los puntos de $\mathcal{C}$ y dados $X, Y \in \mathcal{X}$ los vértices X e Y están conectados con la arista i si $X \neq Y$ y $r_i(X) = Y$ para $i \in I$.

1.6. Notación. Denotaremos por $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ a la base estándar de $\mathbb{Z}^I$. Por ejemplo: si I tiene dos elementos, $Z^I = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

1.7. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan y sea $\mathcal{D}(\mathcal{X}, I)$ la categoría cuyos objetos son los elementos de $\mathcal{X}$ y los morfismos entre $X, Y \in \mathcal{X}$ están definidos como

$$\hom(X, Y) = \left\{(Y, f, X) : f \in \operatorname{End}(\mathbb{Z}^I)\right\}$$

con la composición

$$(Z, g, Y) \circ (Y, f, X) = (Z, gf, X), \qquad X, Y, Z \in \mathcal{X},\ f, g \in \operatorname{End}(\mathbb{Z}^I).$$

Para cada $X \in \mathcal{X}$ y cada $i \in I$ se define

$$s_i^X \in \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}^I), \quad s_i^X \alpha_j = \alpha_j - a_{ij}^X \alpha_i, \quad j \in I.$$

Se define el **grupoide de Weyl** de $\mathcal{C}$ como la menor subcategoría $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{D}(\mathcal{X}, I)$ que contiene a los morfismos $(r_i(X), s_i^X, X)$, donde $i \in I$ y $X \in \mathcal{X}$.

1.8. Notación. Los morfismos del grupode de Weyl $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ de un semigrafo de Cartan $\mathcal{C}$ que terminan en $X \in \mathcal{X}$ son ternas de la forma

$$w = (X, s_{i_1}^{r_{i_1}(X)} s_{i_2}^{r_{i_2} r_{i_1}(X)} \cdots s_{i_k}^{r_{i_k} \cdots r_{i_1}(X)}, r_{i_k} \cdots r_{i_1}(X)),$$

donde $k \geqslant 0$. Cuando no haya peligro de confusión, simplemente escribiremos $w = \mathrm{id}_X\, s_{i_1} \cdots s_{i_k}$.

1.9. Ejercicio. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan. Demuestre que $s_i^X = s_i^{r_i(X)}$ para todo $i \in I$ y $X \in \mathcal{X}$. Concluya que todo morfismo de $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ es inversible.

1.10. Ejemplo. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan de rango dos. Supongamos que $I = \{1, 2\}$. Si $X \in \mathcal{X}$ entonces las matrices de s_1^X y s_2^X con respecto a la base estándar de $\mathbb{Z}^I$ es

$$s_1^X = \begin{pmatrix} -1 & -a_{12}^X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21}^X & -1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

1.11. Un semigrafo de Cartan $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i \in I}, (A^X)_{X \in \mathcal{X}})$ es **simplemente conexo** si para cada $X, Y \in \mathcal{X}$, $\hom_{\mathcal{W}(\mathcal{C})}(X, Y)$ tiene al menos un elemento.

1.12. Si $\mathcal{D}$ es una categoría y $X \in \mathcal{D}$, notaremos

$$\hom(\mathcal{D}, X) = \bigcup_{Y \in \mathcal{D}} \hom(Y, X).$$

Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i \in I}, (A^X)_{X \in \mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan. Para cada $X \in \mathcal{X}$ se define el conjunto de **raíces reales** de $\mathcal{C}$ en X como

$$\Delta^{X\mathrm{re}} = \{w\alpha_i \in \mathbb{Z}^I : w \in \hom(\mathcal{W}(\mathcal{C}), X),\ i \in I\}.$$

Los α_i, $i \in I$, se denominan **raíces simples**. Las **raíces positivas** (resp. **negativas**) son los elementos del conjunto

$$\Delta_+^{X\mathrm{re}} = \Delta^{X\mathrm{re}} \cap \mathbb{N}_0^I \quad (\text{resp. } \Delta_-^{X\mathrm{re}} = \Delta^{X\mathrm{re}} \cap -\mathbb{N}_0^I).$$

Se dice que un semigrafo de Cartan $\mathcal{C}$ es **finito** si $\Delta^{X\mathrm{re}}$ es un conjunto finito para todo $X \in \mathcal{X}$. Para cada $X \in \mathcal{X}$, $i, j \in I$ se define

$$m_{ij}^X = |\Delta^{X\mathrm{re}} \cap (\mathbb{N}_0\alpha_i + \mathbb{N}_0\alpha_j)|.$$

Se dice que $\mathcal{C}$ es un **grafo de Cartan** si valen las siguientes propiedades:

1) Para cada $X \in \mathcal{X}$ el conjunto $\Delta^{X\mathrm{re}}$ está formado por raíces positivas y negativas.
2) Si $X \in \mathcal{X}$, $i, j \in I$ y $m_{ij}^X < \infty$ entonces $(r_i r_j)^{m_{ij}^X}(X) = X$.

1.13. Notación. Para abreviar, escribiremos $1^a 2^b$ para denotar al elemento $a\alpha_1 + b\alpha_2 \in \mathbb{Z}^2$.

1.14. Ejercicio. Consideremos la upla $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i \in I}, (A^X)_{X \in \mathcal{X}})$, donde $I = \{1, 2\}$ y $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$, $r_1 = (X_1 X_2)$, $r_2 = (X_2 X_3)$,

$$A^{X_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{X_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{X_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que

$$\begin{aligned}
\Delta^{X_1\mathrm{re}} = \{ &\pm 1, \pm 2, \pm 12, \pm 12^2, \pm 12^3, \pm 1^2 2^3, \\
&\pm 1^3 2^4, \pm 1^3 2^5, \pm 1^4 2^5, \pm 1^4 2^7, \pm 1^5 2^7, \pm 1^5 2^8\}, \\
\Delta^{X_2\mathrm{re}} = \{ &\pm 12^{-1}, \pm 1, \pm 2, \pm 12, \pm 12^2, \pm 12^3, \\
&\pm 12^4, \pm 1^2 2, \pm 1^2 2^3, \pm 1^2 2^5, \pm 1^3 2^4, \pm 1^3 2^5\}, \\
\Delta^{X_3\mathrm{re}} = \{ &\pm 1, \pm 2, \pm 12, \pm 12^2, \pm 12^3, \pm 12^4, \\
&\pm 12^5, \pm 1^2 2^3, \pm 1^2 2^5, \pm 1^2 2^7, \pm 1^3 2^7, \pm 1^3 2^8\}.
\end{aligned}$$

En particular, $\mathcal{C}$ no es un grafo de Cartan pues $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \Delta^{X_2\mathrm{re}}$.

1.15. Ejercicio. Sean $I = \{1, 2\}$, $\mathcal{X} = \{X_1, X_2\}$, $r_1 = (X_1 X_2)$, $r_2 = \mathrm{id}$,

$$A^{X_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{X_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ es un semigrafo de Cartan de rango dos. Demuestre que

$$\Delta^{X_1 re} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 12, \pm 12^2, \pm 12^3, \pm 1^2 2^3, \pm 1^3 2^4, \pm 1^3 2^5\},$$
$$\Delta^{X_2 re} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 12, \pm 12^2, \pm 12^3, \pm 12^4, \pm 1^2 2^3, \pm 1^2 2^5\}.$$

1.16. Ejercicio. Sean $I = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{X} = \{X, Y\}$, $r_1 = (XY)$, $r_2 = r_3 = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$,

$$A^X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ es un grafo de Cartan finito.

1.17. Ejercicio. Sean $I = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{X} = \{X, Y\}$, $r_1 = (XY)$, $r_2 = r_3 = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$,

$$A^X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ es un grafo de Cartan finito.

1.18. Ejercicio. Veremos ahora un ejemplo de semigrafo de Cartan que no es grafo de Cartan. Sean $I = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_4\}$, $r_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$, $r_2 = (X_2 X_3)$, $r_3 = (X_1 X_2)(X_3 x_4)$. Sean

$$A^{X_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{X_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A^{X_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{X_4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ no es un grafo de Cartan.

2. Grupoides de Weyl de rango dos

2.1. Sea $\mathcal{A}^+$ el menor subconjunto de $\bigcup_{n\geqslant 2} \mathbb{N}_0^n$ que cumple las siguientes dos propiedades:

1) $(0, 0) \in \mathcal{A}^+$.
2) Si $(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{A}^+$ entonces, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$,

$$V_i(c_1, \dots, c_n) = (c_1, \dots, c_{i-2}, c_{i-1} + 1, 1, c_i + 1, c_{i+1}, \dots, c_n) \in \mathcal{A}^+.$$

2.2. Ejercicio. Sea $n \geqslant 2$. Demuestre que si $(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{A}^+$ entonces $\sum_{i=1}^n c_i = 3n - 6$.

2.3. Notación. Para cada $n \geqslant 2$ denotaremos por $\mathcal{A}^+(n)$ al conjunto de sucesiones $(c_1, \dots, c_n)$ que pertenecen a $\mathcal{A}^+$.

2.4. Ejemplos. Un cálculo directo muestra que

$\mathcal{A}^+(2) = \{(0, 0)\}$,

$\mathcal{A}^+(3) = \{(1, 1, 1)\}$,

$\mathcal{A}^+(4) = \{(1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1)\}$,

$\mathcal{A}^+(5) = \{(1, 2, 2, 1, 3), (1, 3, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 3, 1), (3, 1, 2, 2, 1), (2, 1, 3, 1, 2)\}$.

2.5. Ejercicio. Demuestre que el cardinal de $\mathcal{A}^+(n+2)$ es

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

el n-ésimo número de Catalan.

2.6. Sea $n \geqslant 3$ y sea P_n un n-ágono convexo cuyos vértices están enumerados con elementos de $\{1,\dots,n\}$ de forma tal que dos vértices adyacentes tienen números consecutivos. Sea $T_n(P_n)$ el conjunto de triangulaciones de P_n. Para cada $T \in T_n(P_n)$ definimos

$$c(T) = (c_1(T),\dots,c_n(T)),$$

donde $c_i(T)$ es la cantidad de triángulos que tiene el i-ésimo vértice.

2.7. Ejemplos.

1) Hay una única triangulación posible T del triángulo P_3. Luego $c(T) = (1,1,1)$.
2) Hay dos triangulaciones posibles para el cuadrado P_4. Si T es una triangulación de P_4 entonces $c(T) \in \{(1,2,1,2),(2,1,2,1)\}$.

2.8. Ejercicio. Sea $n \geqslant 2$ y sea P_n un n-ágono convexo cuyos vértices están enumerados con elementos de $\{1,\dots,n\}$ de forma tal que dos vértices adyacentes tienen números consecutivos. Sea $T_n(P_n)$ el conjunto de triangulaciones de P_n. Demuestre que la función

$$T_n(P_n) \to \mathcal{A}^+(n), \quad T \mapsto c(T),$$

es biyectiva.

2.9. Ejercicio. Sea $n \geqslant 2$. Demuestre que el grupo diedral

$$\mathbb{D}_n = \langle r, s : r^n = s^2 = 1,\, srs = r^{-1}\rangle$$

de $2n$ elementos actúa en $\mathcal{A}^+(n)$ via

$$\begin{aligned} s\cdot(c_1,\dots,c_n) &= (c_n, c_{n-1},\dots,c_1),\\ r\cdot(c_1,\dots,c_n) &= (c_2,\dots,c_n,c_1). \end{aligned}$$

2.10. Ejercicio. Sea $n \geqslant 3$ y sea $(c_1,\dots,c_n) \in \mathcal{A}^+(n)$. Demuestre que si $i \in \{2,\dots,n-1\}$ y $c_i = 1$ entonces

$$(c_1,\dots,c_{i-2}, c_{i-1}-1, c_{i+1}-1, c_{i+2},\dots,c_n) \in \mathcal{A}^+(n-1).$$

2.11. Sea

$$\eta\colon \mathbb{Z} \to \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}), \quad a \mapsto \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.12. Ejercicio. Demuestre que

$$\eta(a)\eta(b) = \eta(a+1)\eta(1)\eta(b+1)$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.

2.13. Lema. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{Z}$ *y*

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\alpha_2,\\ \beta_k &= \eta(c_1)\cdots\eta(c_{k-1})(\alpha_1), \quad k \in \{1,\dots,n+1\}. \end{aligned}$$

Valen las siguientes afirmaciones:

1) $\beta_{k+1} = c_k\beta_k - \beta_{k-1}$ *para todo* $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
2) *Si* $n \geqslant 3$ *y* $c_k = 0$ *para algún* $k \in \{1, \dots, n-1\}$ *entonces* $\beta_l \notin \mathbb{N}_0^2$ *para algún* $l \in \{1, \dots, n\}$.
3) *Si para* $k \in \{1, \dots, n-1\}$ *vale que* $c_k \geqslant 2$ *y* $\beta_k = a_k\alpha_1 + b_k\alpha_2$ *entonces*

$$\begin{aligned} a_k &> b_k \geqslant 0, & b_k &> b_{k-1}, \\ a_k &> a_{k-1}, & a_k - b_k - a_{k-1} + b_{k-1} &\geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.13.1}$$

para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Demostración. Para demostrar la primera afirmación procederemos por inducción en k. El caso $k = 1$ es fácil pues

$$\beta_2 = \eta(c_1)(\alpha_1) = c_1\alpha_1 + \alpha_2.$$

Supongamos entonces que el resultado es válido para $k \geqslant 2$. Como $\eta(c_k)(\alpha_1) = c_k\alpha_1 + \alpha_2$ y $\eta(c_{k-1})(\alpha_2)$, al usar la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} &= \eta(c_1)\cdots\eta(c_k)(\alpha_1) \\ &= \eta(c_1)\cdots\eta(c_{k-1})(c_k\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= c_k\beta_k + \eta(c_1)\cdots\eta(c_{k-2})(-\alpha_1) = c_k\beta_k - \beta_{k-1}, \end{aligned}$$

tal como se quería demostrar.

Para demostrar la segunda afirmación observemos que si $c_1 = 0$ entonces $\beta_3 = c_2\alpha_2 - \alpha_1 \notin \mathbb{N}_0^2$. En cambio, si $c_k = 0$ para $k \in \{2, \dots, n-1\}$, entonces, por el ítem anterior, $\beta_{k+1} = -\beta_{k-1}$. Luego $\beta_{k+1} \notin \mathbb{N}_0^2$ o bien $\beta_{k-1} \notin \mathbb{N}_0^2$.

Por inducción en k demostraremos ahora que vale (2.13.1). El caso $k = 1$ es evidente pues $a_1 = 1$ y $b_1 = 0$. Supongamos entonces que (2.13.1) vale para algún $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Por hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned} & a_{k+1} - b_{k+1} = (c_k - 1)(a_k - b_k) + (a_k - b_k - a_{k-1} + b_{k-1}) > 0, \\ & a_{k+1} - a_k = (c_k - 2)a_k + (a_k - a_{k-1}) > 0, \\ & b_{k+1} - b_k = (c_k - 2)b_k + (b_k - b_{k-1}) > 0, \\ & a_{k+1} - b_{k+1} - a_k + b_k \\ & \qquad = (c_k - 2)(a_k - b_k) + (a_k - b_k - a_{k-1} + b_{k-1}) \geqslant 0, \end{aligned}$$

tal como se quería demostrar. □

2.14. Lema. *Sean* $n \geqslant 2$, $c'_1, \dots, c'_n \in \mathbb{Z}$ *y* $i \in \{2, \dots, n\}$. *Si*

$$\begin{aligned} (c_1, \dots, c_{n+1}) &= V_i(c'_1, \dots, c'_n) \\ &= (c'_1, \dots, c'_{i-2}, c'_{i-1} + 1, 1, c'_i + 1, c'_{i+1}, \dots, c'_n). \end{aligned}$$

y escribimos

$$\begin{aligned} \beta_k &= \eta(c_1)\cdots\eta(c_{k-1})(\alpha_1), & k &\in \{1, \dots, n+1\}, \\ \beta'_k &= \eta(c'_1)\cdots\eta(c'_{k-1})(\alpha_1), & k &\in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

demuestre que

$$\beta_k = \begin{cases} \beta'_k & \text{si } k \in \{1, \dots, i-1\}, \\ \beta'_{k-1} & \text{si } k \in \{i+1, \dots, n+1\}, \\ \beta'_{i-1} + \beta'_i = \beta_{i-1} + \beta_{i+1} & \text{si } k = i, \end{cases}$$

Demostración. Al usar el ejercicio 2.12 obtenemos inmediatamente que $\beta_k = \beta'_k$ para todo $k \in \{1, \dots, i-1, i+2, \dots, n+1\}$. Además

$$\begin{aligned}\beta_{i+1} &= \eta(c_1)\cdots\eta(c_i)(\alpha_1)\\ &= \eta(c'_1)\cdots\eta(c'_{i-2})\eta(c'_{i-1}+1)(\alpha_1+\alpha_2) = \beta'_i\end{aligned}$$

pues $\beta(c+1)(\alpha_1+\alpha_2) = \eta(c)(\alpha_1)$ para todo $c \in \mathbb{Z}$. Similarmente,

$$\begin{aligned}\beta_i &= \eta(c_1)\cdots\eta(c_{i-1})(\alpha_1)\\ &= \eta(c'_1)\cdots\eta(c'_{i-2})\eta(c'_{i-1}+1)(\alpha_1)\\ &= \eta(c'_1)\cdots\eta(c'_{i-2})(\eta(c'_{i-1})(\alpha_1)+\alpha_2)\\ &= \beta'_i + \beta'_{i-1},\end{aligned}$$

lo que demuestra el lema. □

2.15. Teorema. *Sea* $n \geqslant 2$ *y sea* $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{A}^+$.
2) $\eta(c_1)\cdots\eta(c_n) = -I$ *y* $\beta_k = \eta(c_1)\cdots\eta(c_{k-1})(\alpha_1) \in \mathbb{N}_0^2$ *para todo* $k \in \{1, \dots, n\}$.

2.16. Ejercicio. Demuestre el teorema 2.15.

2.17. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan de rango dos. Sean $X \in \mathcal{X}$, $i \in I$. Se define la **sucesión característica** de $\mathcal{C}$ con respecto al par (X, i) como la sucesión $(c_k)_{k\geqslant 1} \subseteq \mathbb{N}_0$, donde

$$c_{2k+1} = -a_{ij}^{(r_jr_i)^k(X)}, \quad c_{2k+2} = -a_{ji}^{(r_jr_i)^{k+1}(X)}$$

para todo $k \geqslant 0$ y $j \neq i$.

2.18. Ejercicio. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan de rango dos y sea $(c_k)_{k\geqslant 1}$ la sucesión característica de $\mathcal{C}$ con respecto a (X, i). Demuestre que la sucesión característica de $\mathcal{C}$ con respecto a $(r_i(X), j)$ is $(c_{k+1})_{k\geqslant 2}$.

2.19. Ejercicio. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan de rango dos. Supongamos que $I = \{i, j\}$. Sean $X \in \mathcal{X}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $(r_jr_i)^n(X) = X$. Si $(c_k)_{k\geqslant 1}$ es la sucesión característica de $\mathcal{C}$ con respecto a (X, i), demuestre que $c_{2n+k} = c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

2.20. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan de rango dos. Supongamos que $I = \{i, j\}$. Sea $(c_k)_{k\geqslant 1}$ es la sucesión característica de $\mathcal{C}$ con respecto al par (X, i). Se define la **sucesión de raíces** de $\mathcal{C}$ con respecto al par (X, i) como la sucesión $(\beta_k)_{k\geqslant 1} \subseteq \mathbb{Z}^2$, donde

$$\beta_k = \eta(c_1)\cdots\eta(c_{k-1})(\alpha_1)$$

para todo $k \geqslant 1$.

2.21. Notación. Sea $\tau\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definida por $(x, y) \mapsto (y, x)$.

2.22. Ejercicio. Demuestre que $s_1^Y = \eta(-a_{12}^Y)\tau$ y $s_2^Y = \tau\eta(-a_{21}^Y)$ para todo $Y \in \mathcal{X}$.

2.23. Ejercicio. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan de rango dos. Supongamos que $I = \{1, 2\}$. Sean $(\beta_k)_{k\geqslant 1}$ (resp. $(\gamma_k)_{k\geqslant 1}$) la sucesión de raíces de $\mathcal{C}$ con respecto al par $(X, 1)$ (resp. $(X, 2)$). Demuestre que

$$\begin{aligned} \beta_{2k+1} &= \mathrm{id}_X(s_1s_2)^k\alpha_1, & \beta_{2k+2} &= \mathrm{id}_X(s_1s_2)^k s_1\alpha_2, \\ \tau\gamma_{2k+1} &= \mathrm{id}_X(s_2s_1)^k\alpha_2, & \tau\gamma_{2k+2} &= \mathrm{id}_X(s_2s_1)^k s_2\alpha_1, \end{aligned} \tag{2.23.1}$$

para todo $k \geqslant 0$. Concluya que

$$\Delta^{X\mathrm{re}} = \{\pm\beta_k, \pm\tau\gamma_k : k \geqslant 1\}.$$

2.24. Teorema. *Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ un semigrafo de Cartan conexo de rango dos tal que $\mathcal{X}$ es finito. Supongamos que $I = \{i, j\}$. Sean $X \in \mathcal{X}$, $(c_k)_{k\geqslant 1}$ la sucesión característica de $\mathcal{C}$ con respecto al par (X, i),*

$$n = \min\{m \in \mathbb{N} : (r_j r_i)^m(X) = X\},$$

y $\kappa = 6n - \sum_{k=1}^{2n} c_k$. Son equivalentes:

1) *$\mathcal{C}$ es un grafo de Cartan finito.*
2) *$\kappa > 0$, $\kappa \mid 12$, $(c_1, \dots, c_{12n/\kappa}) \in \mathcal{A}^+$ y $(c_k)_{k\geqslant 1} = (c_1, \dots, c_{12n/\kappa})^\infty$.*

En este caso, $12n/\kappa = |\Delta_+^{X\mathrm{re}}| = m_{ij}^X$.

2.25. Ejercicio. Demuestre el teorema 2.24.

2.26. Ejemplo. Vamos a construir un semigrafo de Cartan $\mathcal{C}$ cuya sucesión característica sea $(1, 1, 1)^\infty$.

Sea $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_6\}$ y sean

$$r_1 = (X_1X_2)(X_3X_4)(X_5X_6), \quad r_2 = (X_2X_3)(X_4X_5)(X_6X_1).$$

Si $(1, 1, 1)^\infty$ es la sucesión característica del semigrafo de Cartan, entonces

$$\begin{aligned} c_1 &= -a_{12}^{X_1} = -a_{12}^{X_2}, & c_2 &= -a_{21}^{X_3} = -a_{21}^{X_2}, & c_3 &= -a_{12}^{X_3} = -a_{12}^{X_4}, \\ c_4 &= -a_{21}^{X_5} = -a_{21}^{X_4}, & c_5 &= -a_{12}^{X_5} = -a_{12}^{X_6}, & c_6 &= -a_{21}^{X_1} = -a_{21}^{X_6}. \end{aligned}$$

Un cálculo directo muestra entonces que

$$A^X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

para todo $X \in \mathcal{X}$. Observemos que $\mathcal{C}$ es conexo.

2.27. Ejemplo. Vamos a construir un semigrafo de Cartan $\mathcal{C}$ cuya sucesión característica sea $(1, 2, 1, 2)^\infty$.

Sea $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_8\}$ y sean

$$r_1 = (X_1X_2)(X_3X_4)(X_5X_6)(X_7X_8), \quad r_2 = (X_2X_3)(X_4X_5)(X_6X_7)(X_8X_1).$$

Si $(1, 2, 1, 1)^\infty$ es la sucesión característica, entonces

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 = -a_{12}^{X_1} = -a_{12}^{X_2}, & 2 &= c_2 = -a_{21}^{X_3} = -a_{21}^{X_2}, \\ 1 &= c_3 = -a_{12}^{X_3} = -a_{12}^{X_4}, & 2 &= c_4 = -a_{21}^{X_5} = -a_{21}^{X_4}, \\ 1 &= c_5 = -a_{12}^{X_5} = -a_{12}^{X_6}, & 2 &= c_6 = -a_{21}^{X_7} = -a_{21}^{X_6}, \\ 1 &= c_7 = -a_{12}^{X_7} = -a_{12}^{X_8}, & 2 &= c_8 = -a_{21}^{X_1} = -a_{21}^{X_8}. \end{aligned}$$

Luego, si definimos $I = \{1, 2\}$ y

$$A^X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

para todo $X \in \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathcal{X}, (r_i)_{i\in I}, (A^X)_{X\in\mathcal{X}})$ es un semigrafo de Cartan conexo que tiene a $(1, 2, 1, 2)^\infty$ como sucesión característica respecto de $(X_1, 1)$.

2.28. Ejercicio. Sean $n \geqslant 2$, $I = \{1, 2\}$ y $\mathcal{X} = \{1, \dots, 2n\}$. Se define

$$r_1 = (12)(34)\cdots(2n-1\,2n), \quad r_2 = (23)(45)\cdots(2n\,1).$$

Sea $(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{A}^+(n)$. Demuestre que existe un único grafo de Cartan $\mathcal{C}$ conexo, simplemente conexo, finito, con $m_{12}^X = n$ para todo $X \in \mathcal{X}$, cuyos puntos son los elementos de $\mathcal{X}$ y cuya sucesión característica con respecto al par $(X, 1)$ es $(c_1, \dots, c_n)^\infty$.

2.29. Notación. El grafo de Cartan asociado a $(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{A}^+$ será denotado por $\mathcal{C}(c_1, \dots, c_n)$.

2.30. Teorema. *Todo grafo de Cartan de rango dos, conexo y simplemente conexo, es isomorfo a un grafo de Cartan de la forma* $\mathcal{C}(c_1, \dots, c_n)$*, donde* $(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{A}^+$.

2.31. Ejercicio. Sean $(c_1, \dots, c_p) \in \mathcal{A}^+$ y $(d_1, \dots, d_q) \in \mathcal{A}^+$. Demuestre que los semigrafos de Cartan $\mathcal{C}(c_1, \dots, c_p)$ y $\mathcal{D}(d_1, \dots, d_q)$ son isomorfos si y sólo si $p = q$ y existe $\sigma \in \mathbb{D}_n$ tal que $\sigma \cdot (c_1, \dots, c_p) = (d_1, \dots, d_q)$.

Referencias

[1] M. Cuntz. Crystallographic arrangements: Weyl groupoids and simplicial arrangements. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(4):734–744, 2011.

[2] M. Cuntz and I. Heckenberger. Weyl groupoids of rank two and continued fractions. *Algebra Number Theory*, 3(3):317–340, 2009.

[3] M. Cuntz and I. Heckenberger. Weyl groupoids with at most three objects. *J. Pure Appl. Algebra*, 213(6):1112–1128, 2009.

[4] M. Cuntz and I. Heckenberger. Reflection groupoids of rank two and cluster algebras of type A. *J. Combin. Theory Ser. A*, 118(4):1350–1363, 2011.

[5] I. Heckenberger. The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type. *Invent. Math.*, 164(1):175–188, 2006.

[6] I. Heckenberger. Classification of arithmetic root systems. *Adv. Math.*, 220(1):59–124, 2009.

[7] I. Heckenberger and H. Yamane. A generalization of Coxeter groups, root systems, and Matsumoto's theorem. *Math. Z.*, 259(2):255–276, 2008.