Pecios y quandles

Leandro Vendramin

Resumen. Estas notas corresponden a un minicurso dictado en la universidad de Talca, Chile, en diciembre de 2015. Compilado el 10 de febrero de 2021 a las 14:15.

Índice

Introducción

En estas notas introduciremos las nociones básicas sobre pecios (*racks*, en inglés) y quandles. Para la teoría básica nos basaremos principalmente en [**1**]. Otras referencias importantes: [**2, 4**].

1. Pecios y quandles

1.1. Un **pecio** es un par $(X, \triangleright)$, donde X es un conjunto no vacío con una operación binaria $\triangleright\colon X \times X \to X$ tal que

(1.1.1) para cada $x \in X$, la función $\varphi_x\colon X \to X$, $y \mapsto x \triangleright y$, es biyectiva,

(1.1.2) $x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Un **quandle** es un pecio que verifica $x \triangleright x = x$ para todo $x \in X$.

1.2. Ejercicio. Sea X un conjunto con una operación binaria

$$\triangleright\colon X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x \triangleright y,$$

tal que para cada $x \in X$ la función $\varphi_x\colon X \to X$, $y \mapsto x \triangleright y$, es biyectiva. Demuestre que X es un pecio si y sólo si

$$\varphi_z \circ \varphi_y \circ \varphi_z^{-1} = \varphi_{\varphi_z(y)}$$

para todo $y, z \in X$.

1.3. EJERCICIO. Sea X un pecio. Demuestre que $(x \triangleright x) \triangleright y = x \triangleright y$ para todo $x, y \in X$.

1.4. EJEMPLO. Sea X un conjunto no vacío. Entonces X es un quandle con $x \triangleright y = y$ para todo $x, y \in X$. Este pecio se denomina **quandle trivial** sobre X.

1.5. EJEMPLO. Sean $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ y $\sigma \in \mathbb{S}_n$. El conjunto $X = \{1, \dots, n\}$ con la operación $x \triangleright y = \sigma(y)$ es un pecio. Queda como ejercicio verificar que X es un quandle si y sólo si $\sigma = \mathrm{id}$.

1.6. EJEMPLO. Sea G un grupo y X una unión de clases de conjugación de G. Entonces X es un quandle con $x \triangleright y = xyx^{-1}$ para todo $x, y \in X$.

Dos ejemplos: El quandle asociado a la clase de conjugación de g en G se denota por g^G; el quandle de conjugación asociado al grupo G se denota por $\mathrm{Conj}(G)$.

1.7. EJERCICIO. Si X es un quandle de conjugación entonces

$$x \triangleright y = y \Leftrightarrow y \triangleright x = x \quad \text{para todo } x, y \in X. \tag{1.7.1}$$

Encuentre un quandle de tres elementos que no cumpla con la condición (1.7.1).

1.8. Sean X e Y dos pecios. Una función $f\colon X \to Y$ es un **morfismo** de pecios si $f(x \triangleright x') = f(x) \triangleright f(x')$ para todo $x, x' \in X$. Análogamente se define la noción de morfismo entre quandles. Los pecios y sus morfismos forman una categoría. Los quandles forman una subcategoría plena de la categoría de pecios.

1.9. EJERCICIO. Pruebe que la categoría de pecios tiene productos.

1.10. EJEMPLO. Sea $f\colon G \to H$ un morfismo de grupos. Como f induce un morfismo $\mathrm{Conj}(G) \to \mathrm{Conj}(H)$ de pecios, existe un funtor de la categoría de grupos en la categoría de pecios.

1.11. EJERCICIO. Sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\mathbb{Z}/n$ es un quandle con

$$x \triangleright y = 2x - y, \quad x, y \in \mathbb{Z}/n.$$

Este quandle se denomina **quandle diedral** y se denota por $\mathbb{D}_n$. ¿Es $\mathbb{D}_n$ un quandle de conjugación?

1.12. EJEMPLO. Veamos un ejemplo concreto de la construcción del ejercicio 1.11. Sea $X = \mathbb{Z}/3 = \{0, 1, 2\}$ con la estructura de quandle diedral. Entonces $\varphi_0 = (12)$, $\varphi_1 = (02)$ y $\varphi_2 = (01)$.

Veamos cómo podemos representar a este quandle como un quandle de conjugación. Sea $\mathbb{D}_3 = \langle r, s : r^3 = s^2 = 1,\ srs = r^{-1} \rangle$ y sea $C = \{s, rs, r^2 s\}$ la clase de conjugación de involuciones de $\mathbb{D}_3$.

Como $(r^i s)(r^j s)(r^i s)^{-1} = r^{2i-j} s$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}/3$, la función

$$f\colon C \to \mathbb{Z}/3, \quad r^i s \mapsto i,$$

resulta ser un isomorfismo de quandles.

1.13. Ejercicio. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $(\cdot|\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{C}$ una forma bilinear simétrica y no degenerada. Demuestre que el par $(V\setminus\{0\},\triangleright)$, donde

$$v\triangleright w = w-2\frac{(w|v)}{(v|v)}v,$$

es un pecio que no necesariamente es un quandle.

1.14. Ejercicio. Sea G un grupo y sea $s\in\operatorname{Aut}(G)$. Demuestre que

$$x\triangleright y = s(yx^{-1})x,\quad x,y\in G,$$

define una estructura de quandle sobre G.

1.15. Ejercicio. Sea G un grupo y sea $s\in\operatorname{Aut}(G)$. Demuestre que

$$x\triangleright y = xs(yx^{-1}),\quad x,y\in G,$$

define una estructura de quandle sobre G.

1.16. Sea M un $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-módulo a izquierda. Definimos el **quandle de Alexander** sobre M como el quandle dado por

$$x\triangleright y=(1-t)x+ty\qquad\text{para todo } x,y\in M. \tag{1.16.1}$$

Demostremos que (1.16.1) define una estructura de quandle sobre M. Es evidente que para cada $x\in M$ la función $\varphi_x\colon y\mapsto(1-t)x+ty$ es inversible: la inversa φ_x^{-1} está dada por $y\mapsto(1-t^{-1})x+t^{-1}y$. Además $x\triangleright x=x$ para todo $x\in X$. Para demostrar la distributividad, tomamos $x,y,z\in M$ y calculamos

$$\begin{aligned}(x\triangleright y)\triangleright(x\triangleright z)&=((1-t)x+ty)\triangleright((1-t)x+tz)\\&=(1-t)\left((1-t)x+ty\right)+t\left((1-t)x+tz\right)\\&=(1-t)x+t(1-t)y+t^2z\\&=(1-t)x+t(y\triangleright z)\\&=x\triangleright(y\triangleright z).\end{aligned}$$

1.17. Observación. Alternativamente un quandle de Alexander puede definirse como un par (A,g), donde A es un grupo abeliano, $g\in\operatorname{Aut}(A)$ y $a\triangleright b=(\operatorname{id}-g)(a)+g(b)$ para todo $a,b\in A$.

1.18. Ejemplo. Veamos cómo es el quandle asociado a la clase de conjugación $(123)^{\mathbb{A}_4}$. Primero fijamos un orden en la clase:

$$(123)^{\mathbb{A}_4}=\{(123),(134),(142),(243)\}.$$

Calculamos por ejemplo:

$$\begin{aligned}(123)\triangleright(134)&=(123)(134)(123)^{-1}=(142),\\(123)\triangleright(142)&=(123)(142)(123)^{-1}=(243).\end{aligned}$$

De esta forma construimos la tabla del quandle:

	(123)	(134)	(142)	(243)
(123)	(123)	(142)	(243)	(134)
(134)	(243)	(134)	(123)	(142)
(142)	(134)	(243)	(142)	(123)
(243)	(142)	(123)	(134)	(243)

Veamos que este quandle puede presentarse como un quandle de Alexander. Consideremos el cuerpo de cuatro elementos

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$$

con la estructura de quandle dada por el automorfismo $x \mapsto \alpha x$ de $\mathbb{F}_4$. Si calculamos la tabla de este quandle vemos inmediatamente que la función $(123)^{\mathbb{A}_4} \to \mathbb{F}_4$ dada por

$$(123) \mapsto 0, \quad (134) \mapsto \alpha, \quad (142) \mapsto \alpha + 1, \quad (243) \mapsto 1,$$

es un isomorfismo de quandles.

1.19. Ejercicio. Sean A un grupo abeliano, $g \in \operatorname{Aut}(A)$ y $f \in \operatorname{End}(A)$. Supongamos que $fg = gf$ y que $f(\operatorname{id} - g - f) = 0$. Demuestre que la operación $x \triangleright y = f(x) + g(y)$, $x, y \in A$, define una estructura de pecio sobre A. Más aún, $(A, \triangleright)$ es un quandle si y sólo si $f = \operatorname{id} - g$.

1.20. Ejercicio. Sean (A, g) y (B, h) dos quandles de Alexander. Demuestre que A y B son isomorfos si y sólo si existe un morfismo $T\colon A \to B$ de grupos abelianos tal que $T \circ g = h \circ T$.

1.21. Ejemplo. Sea G un grupo. Entonces G con

$$x \triangleright y = xy^{-1}x \qquad \text{para todo } x, y \in G$$

es un quandle. Este pecio será denominado el **corazón** de G y será denotado por $\operatorname{Core}(G)$.

Ejemplos: el corazón del grupo cíclico $\mathbb{Z}/n$ es el pecio diedral $\mathbb{D}_n$ y el corazón de $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ es el pecio trivial de cuatro elementos.

1.22. Ejercicio. En este ejercicio estudiaremos la relación entre pecios y quandles. Sea X un pecio y sea $\iota\colon X \to X$ la función dada por $x \mapsto x \triangleright^{-1} x$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

1) $x \triangleright \iota(y) = \iota(x \triangleright y)$ para todo $x, y \in X$.
2) $\varphi_{\iota(x)} = \varphi_x$ para todo $x \in X$.
3) ι es biyectiva con inversa $j\colon X \to X$ dada por $x \mapsto x \triangleright x$.
4) La operación $x * y = x \triangleright \iota(y)$, $x, y \in X$, define una estructura de quandle sobre X.

Vamos a definir una categoría $\mathcal{C}$ que nos permitirá clasificar pecios en términos de quandles. Los objetos de $\mathcal{C}$ serán los pares $((X, \triangleright), f)$, donde X es un quandle y $f\colon X \to X$ es una función biyectiva que cumple

$$x \triangleright f(y) = f(x \triangleright y) \qquad \text{para todo } x, y \in X, \tag{1.22.1}$$

$$\varphi_{f(x)} = \varphi_x \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{1.22.2}$$

Los morfismos $\gamma \in \hom((X, f), (Y, g))$ de la categoría $\mathcal{C}$ serán los morfismos $\gamma\colon X \to Y$ de pecios que satisfacen $\gamma \circ f = g \circ \gamma$.

Afirmación. La categoría de pecios es equivalente a $\mathcal{C}$.

Queda como ejercicio demostrar esta afirmación. Una pista: si $(X, \triangleright)$ es un pecio, entonces el par $((X, *), j)$ es un objeto de $\mathcal{C}$; recíprocamente, si $((X, *), f)$ es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces el par $(X, \triangleright)$, donde $x \triangleright y = x * f(y)$, $x, y \in X$, es un pecio.

1.23. Sea G un grupo. Supongamos que G actúa por $\cdot$ a izquierda en un conjunto X. Un **módulo cruzado** es una terna (G, X, ∂), donde $\partial\colon X \to G$ es una función tal que $\partial(g \cdot x) = g\partial(x)g^{-1}$ para cada $g \in G$ y $x \in X$.

Sean (G, X, ∂) y (G_1, X_1, ∂_1) módulos cruzados. Un **morfismo** entre (G, X, ∂) y (G_1, X_1, ∂_1) es un par (ψ, f), donde $\psi\colon G \to G_1$ es un morfismo de grupos y $f\colon X \to X_1$ es una función tal que $\partial_1 \circ f = \psi \circ \partial$ and $f(g \cdot x) = \psi(g) \cdot f(x)$ para cada $x \in X$ y $g \in G$.

Los módulos cruzados y sus morfismos forman una categoría.

Todo módulo cruzado (G, X, ∂) es un pecio con

$$x \triangleright y = \partial(x) \cdot y \qquad x, y \in X.$$

En efecto, primero observemos que cada $\varphi_x\colon X \to X$, $y \mapsto \partial(x) \cdot y$, es una función biyectiva con inversa $\varphi_x^{-1}\colon X \to X$, $y \mapsto \partial(x)^{-1} \cdot y$. Además, para cada $x, y, z \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}(x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) &= (\partial(x) \cdot y) \triangleright (\partial(x) \cdot z) = \partial(\partial(x) \cdot y) \cdot (\partial(x) \cdot z)\\ &= (\partial(x)\partial(y)\partial(x)^{-1}) \cdot (\partial(x) \cdot z) = \partial(x) \cdot (\partial(y) \cdot z)\\ &= \partial(x) \cdot (y \triangleright z) = x \triangleright (y \triangleright z).\end{aligned}$$

Veamos que la asignación que acabamos de describir es categórica. Sea (ψ, f) un morfismo entre los módulos cruzados (G, X, ∂) y (G_1, X_1, ∂_1). Entonces f es un morfismo de pecios pues

$$f(x \triangleright y) = f(\partial(x) \cdot y) = \psi(\partial(x)) \cdot f(y) = \partial_1(f(x)) \cdot f(y) = f(x) \triangleright_1 f(y)$$

para todo $x, y \in X$. Luego, tenemos un funtor de la categoría de módulos cruzados en la categoría de pecios.

Ejemplo. Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Si $\exp$ denota a la exponencial y $\cdot$ denota a la acción adjunta de G en $\mathfrak{g}$ entonces

$$\exp(g \cdot X) = g\exp(X)g^{-1}, \quad g \in G,\ x \in \mathfrak{g},$$

implica que $(G, \mathfrak{g}, \exp)$ es un módulo cruzado. El pecio asociado a la terna $(G, \mathfrak{g}, \exp)$ se denomina **pecio de Lie** con respecto a G.

Lema. *Sea (G, X, ∂) un módulo cruzado. Entonces*

$$g \cdot (x \triangleright y) = (g \cdot x) \triangleright (g \cdot y)$$

para todo $g \in G$ y $x, y \in X$.

Demostración. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}(g \cdot x) \triangleright (g \cdot y) &= \partial(g \cdot x) \cdot (g \cdot y) = (g\partial(x)g^{-1}) \cdot (g \cdot y)\\ &= (g\partial(x)) \cdot y = g \cdot (\partial(x) \cdot y) = g \cdot (x \triangleright y)\end{aligned}$$

para todo $g \in G$ y $x, y \in X$. □

1.24. Ejercicio. Sea (G, X, ∂) un módulo cruzado. Demuestre que la función $\partial\colon X \to \mathrm{Conj}(G)$ es un morfismo de pecios.

1.25. Sea X conjunto. Un **pecio libre** sobre X es un par $(R(X), j)$, donde $R(X)$ es un pecio y $j\colon X \to R(X)$ es una función tal que para toda función $f\colon X \to Y$, donde Y es un precio, existe un único morfismo $\widetilde{f}\colon R(X) \to Y$ de pecios tal que $\widetilde{f} \circ j = f$.

Vamos a demostrar la existencia del pecio libre sobre X. Sea $L(X)$ el grupo libre en X y sean

$$R(X) = X \times L(X), \quad j\colon X \to R(X), \quad x \mapsto (x, 1).$$

El grupo $L(X)$ actúa a izquierda en $R(X)$:

$$g \cdot (x, h) = (x, gh), \quad x \in X,\ g, h \in L(X).$$

Si $\partial\colon R(X) \to L(X)$ está dada por $(x, g) \mapsto gxg^{-1}$, entonces $R(X)$ es un módulo cruzado pues

$$\partial(g \cdot (x, h)) = \partial(x, gh) = ghx(gh)^{-1} = g\partial(x, h)g^{-1}$$

para todo $x \in X$, $g, h \in L(X)$. Como consecuencia de lo visto en (1.23) obtenemos el siguiente resultado.

Afirmación. El conjunto $R(X)$ junto con la operación

$$(x, g) \triangleright (y, h) = (y, gxg^{-1}h), \quad x, y \in X\ g, h \in L(X)$$

es un pecio.

Si Y es un pecio y $f\colon X \to Y$ es una función entonces existe un único morfismo $\widetilde{f}\colon R(X) \to Y$ de pecios tal que $\widetilde{f}(x, 1) = f(x)$ para todo $x \in X$. Observemos que, como

$$(x, 1) \triangleright (y, g) = (y, xg), \quad (x, 1) \triangleright^{-1} (y, g) = (y, x^{-1}g),$$

entonces

$$(x_{i_1}, 1) \triangleright^{\epsilon_{i_1}} ((x_{i_2}, 1) \triangleright^{\epsilon_{i_2}} \cdots \triangleright^{\epsilon_{i_{k-1}}} ((x_{i_k}, 1) \triangleright^{\epsilon_{i_k}} (x, 1)) \cdots) = (x, x_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{\epsilon_{i_k}})$$

y luego, queda unívocamente definido el morfismo $R(X) \to Y$ de pecios tal que $(x, 1) \mapsto f(x)$.

1.26. Ejemplo. Si $X = \{1\}$ entonces $L(X) \simeq \mathbb{Z}$ y $R(X) \simeq X \times \mathbb{Z}$. Bajo esta identificación, $R(X)$ es un pecio con $(n, 1) \triangleright (m, 1) = (m + 1, 1)$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

1.27. Sea X un pecio. Una relación de equivalencia $\sim$ en X se dice **compatible** con la estructura de pecio de X si

$$x \sim x',\ y \sim y' \implies x \triangleright y \sim x' \triangleright y', \tag{1.27.1}$$

$$x \triangleright y \sim x \triangleright y' \implies y \sim y', \tag{1.27.2}$$

para todo $x, x', y, y' \in X$.

Si $\sim$ es una relación de equivalencia compatible con X entonces el cociente $\overline{X} = X/{\sim}$ tiene una única estructura de pecio que hace que la aplicación canónica $\pi\colon X \to \overline{X}$, $x \mapsto [x]$, sea un morfismo de pecios.

El par $(\overline{X}, \pi)$ cumple con la siguiente propiedad universal: si $f\colon X \to Z$ es un morfismo de pecios tal que $x \sim y$ implica que $f(x) = f(y)$, entonces existe un único morfismo $\overline{f}\colon \overline{X} \to Z$ de pecios tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Además $\overline{f}(\overline{X}) = f(X)$ y la función $\overline{f}$ es inyectiva si y sólo si $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$.

Ejemplo. Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de pecios. Se define una relación de equivalencia en X de la siguiente forma: $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$, $x, x' \in X$. Entonces $\sim$ es compatible con X y $\overline{f}\colon \overline{X} \to f(X)$ es un isomorfismo de pecios.

1.28. Sea X un conjunto. Un **quandle libre** sobre X es un par $(Q(X), j)$, donde $Q(X)$ es un quandle y $j\colon X \to Q(X)$ es una función tal que para cada función $f\colon X \to Y$, donde Y es un quandle, existe un único morfismo $\widetilde{f}\colon Q(X) \to Y$ de quandles tal que $\widetilde{f} \circ j = f$.

Ejercicio. En $R(X)$ consideramos la relación $\sim$ dada por:

$$(x, g) \sim (y, h) \iff x = y \text{ y } h = gx^k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

1) La relación $\sim$ es una relación de equivalencia compatible con $R(X)$.
2) $Q(X) = R(X)/\sim$ es un quandle.
3) El par $(Q(X), j)$, donde $j\colon X \to Q(X)$ está dada por $j(x) = [(x, 1)]$, es un quandle libre sobre X.

1.29. Ejercicio. Sea X un conjunto y sea $\triangleright\colon X \times X \to X$ una función. Entonces $r\colon X \times X \to X \times X$, $r(x, y) = (x \triangleright y, x)$ es una solución conjuntista de la ecuación de trenzas si y sólo si $(X, \triangleright)$ es un pecio. (Recordemos que una función inversible $r\colon X \times X \to X \times X$ es una **solución conjuntista de la ecuación de trenzas** si cumple que $r_{12}r_{23}r_{12} = r_{23}r_{12}r_{23}$, donde $r_{12} = r \times \mathrm{id}$ y $r_{23} = \mathrm{id} \times r$.)

2. Grupos asociados a pecios

2.1. Sea X un pecio. Se define el **grupo interior** de X como el grupo generado por las permutaciones $\{\varphi_x : x \in X\}$, es decir:

$$\mathrm{Inn}(X) = \langle \varphi_x : x \in X \rangle.$$

Es evidente que $\mathrm{Inn}(X)$ es un subgrupo del grupo de permutaciones $\mathbb{S}_X$ de X. En particular, si X es finito, $\mathrm{Inn}(X)$ es un grupo finito.

Observemos que $\mathrm{Inn}(X)$ actúa naturalmente en X. Un quandle X se dice **conexo** (o indescomponible) si el grupo $\mathrm{Inn}(X)$ actúa transitivamente en X. Un quandle se dice **fiel** si la aplicación $X \to \mathrm{Inn}(X)$, $x \mapsto \varphi_x$, es inyectiva.

2.2. Ejemplo. Sea $X = \{0, 1, 2\}$ el quandle diedral de tres elementos, es decir: $x \triangleright y = 2x - y$, $x, y \in X$. Entonces, como $\varphi_0 = (12)$, $\varphi_1 = (02)$, $\varphi_2 = (01)$, tenemos $\mathrm{Inn}(X) = \langle (12), (02), (01) \rangle \simeq \mathbb{S}_3$. Como $\mathrm{Inn}(X)$ actúa transitivamente en X, X es un quandle conexo. Además X es fiel.

2.3. Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ con la estructura de quandle dada por las permutaciones $\varphi_1 = \varphi_3 = (24)$ y $\varphi_2 = \varphi_4 = (13)$. Evidentemente, X no es fiel. El grupo $\mathrm{Inn}(X) = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_4 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ no actúa transitivamente en X pues la descomposición de X en $\mathrm{Inn}(X)$-órbitas es $X = \{1, 3\} \cup \{2, 3\}$. Luego X no es conexo.

2.4. Ejercicio. Sea X el quandle de doce elementos asociado a la clase de conjugación de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{GL}(2, 3)$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

1) $\mathrm{Inn}(X) \simeq \mathbf{GL}(2, 3)/Z(\mathbf{GL}(2, 3)) \simeq \mathbb{S}_4$,
2) X es un quandle conexo, y
3) X no es fiel.

2.5. Ejercicio. Sea (A, g) un quandle de Alexander. Demuestre que A es conexo si y sólo si A es fiel.

2.6. Sea X un pecio. Se define el **grupo de automorfismos** de X como el subgrupo de $\mathbb{S}_X$ formado por los morfismos de pecios, es decir:

$$\operatorname{Aut}(X) = \{f \in \mathbb{S}_X : f \text{ es morfismo de pecios}\}.$$

2.7. Ejercicio. Verifique $\operatorname{Aut}(\mathbb{D}_4) \neq \operatorname{Inn}(\mathbb{D}_4)$.

2.8. Ejercicio. Demuestre que si X es un pecio entonces $\operatorname{Inn}(X)$ es un subgrupo normal de $\operatorname{Aut}(X)$.

2.9. Ejercicio. Sea (A, g) un quandle de Alexander conexo. Demuestre que $\operatorname{Inn}(A, g) \simeq \operatorname{im}(\operatorname{id} - g) \rtimes \langle g \rangle$ y que $\operatorname{Aut}(A, g) \simeq A \times G$, donde

$$G = \{T \in \operatorname{Aut}(A) : T \circ g = g \circ T\}.$$

2.10. Ejercicio. ¿Existen quandles conexos con dos elementos?

2.11. Ejercicio. Pruebe que $\mathbb{D}_n$ es conexo si y sólo si n es impar. ¿Para qué valores de n es $\mathbb{D}_n$ fiel?

2.12. Sea X un pecio. El **grupo envolvente** de X es el grupo

$$G_X = F_X / \langle xy = (x \triangleright y)x,\ x, y \in X \rangle,$$

donde F_X es el grupo libre con base en los elementos de X.

2.13. Observación. El grupo envolvente de un pecio X cumple la siguiente propiedad universal: para cada grupo G y cada función $f\colon X \to G$ que cumple $f(x \triangleright y) = f(x)f(y)f(x)^{-1}$ para todo $x, y \in X$, existe un único morfismo $g : G_X \to G$ de grupos tal que $f = g \circ \partial$, donde $\partial : X \to G_X$ es la aplicación canónica.

2.14. Sea X un pecio. El grupo G_X actúa naturalmente en X y esta acción es transitiva si X es conexo. Es fácil demostrar que G_X es un grupo infinito: basta considerar el morfismo de grupos $d\colon G_X \to \mathbb{Z}$ dado por $x \to 1$.

2.15. Ejercicio. Sea X un pecio finito. Demuestre que las siguientes afirmaciones:

1) El centro $Z(G_X)$ de G_X es un subgrupo de índice finito.
2) Toda clase de conjugación de G_X es finita.

2.16. Observación. El ejercicio 2.15 prueba que si X es un pecio finito entonces toda clase de conjugación de G_X es finita. Luego, si aplicamos el teorema de Schur [**9**, Theorem 5.32], obtenemos que $[G_X, G_X]$ es un grupo finito.

2.17. Ejercicio. Sea X un pecio conexo. Demuestre que el conmutador $[G_X, G_X]$ de G_X actúa transitivamente en X.

2.18. Se define el **patrón** de una permutación

$$\sigma = (i_{1,1} \cdots i_{1,l_1})(i_{2,1} \cdots i_{2,l_2}) \cdots (i_{k,1} \cdots i_{k,l_k}) \in \mathbb{S}_n,$$

donde suponemos $1 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l_k$, como la sucesión $l_1, l_2, \ldots, l_k$.

2.19. Ejemplos. El patrón de $(123) \in \mathbb{S}_3$ es 3, el patrón de $(12) \in \mathbb{S}_3$ es $1,2$ y el patrón de $(1,6)(2,5) \in \mathbb{S}_6$ es $1,1,2,2$.

Sea X un quandle finito y conexo. Como todas las permutaciones φ_x tienen la misma estructura cíclica, todas las φ_x tienen el mismo patrón. Se define el **perfil** de X como el patrón de cualquier φ_x, $x \in X$.

Ejemplos. El perfil de $\mathbb{D}_3$ es $1,2$, y el perfil de $(123)^{\mathbb{A}_4}$ es $1,3$.

Ejercicio. Demuestre las siguientes afirmaciones:

1) El perfil de $(1234)^{\mathbb{S}_4}$ es $1,1,4$.
2) El perfil de $(12)^{\mathbb{S}_4}$ es $1,1,2,2$.

2.20. Conjetura (Hayashi). *Si X es un quandle finito y conexo con perfil $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ con $1 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l_k$ entonces l_k es un múltiplo de l_i para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$.*

3. Algunos resultados de clasificación

3.1. Un quandle X se dice **simple** si todo morfismo $f\colon X \to Y$ de quandles es constante o inyectivo.

3.2. Ejercicio. Sea X un quandle simple con al menos tres elementos. Demuestre las siguientes afirmaciones:

1) X es fiel.
2) X es conexo.
3) $\varphi(X)$ es una clase de conjugación y genera a $\mathrm{Inn}(X)$.
4) $\mathrm{Inn}(X)$ tiene centro trivial.

3.3. Los quandles finitos y simples fueron clasificados por Joyce en [**7**] e independientemente en [**1**]. Ejemplos de quandles simples son las clases de conjugación de grupos simples, y los quandles conexos de Alexander sobre $\mathbb{F}_p$, donde p es un número primo.

3.4. Sea $q(n)$ la cantidad de quandles conexos no isomorfos de tamaño $n \geqslant 1$. La tabla siguiente muestra los valores de $q(n)$ para $n \in \{1, \dots, 45\}$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q(n)$	1	0	1	1	3	2	5	3	8	1	9	10
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$q(n)$	11	0	7	9	15	12	17	10	9	0	21	42
n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$q(n)$	34	0	65	13	27	24	29	17	11	0	15	73
n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	
$q(n)$	35	0	13	33	39	26	41	9	45	0	45	

Para estos valores de $q(n)$ referimos a la sucesión `A181771` de la base de datos de sucesiones *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Para más información consultar [**10**].

3.5. Sea p un número primo. Se sabe que todo quandle conexo de tamaño p es de Alexander, ver [**3**]. En [**5**] Graña clasificó los quandles conexos de tamaño p^2; en particular, todo quandle conexo de p^2 elementos es un quandle de Alexander. En [**6**] se demostró que no existen quandles conexo con $2p$ elementos.

3.6. Problema. Enumerar y clasificar quandles conexos de tamaño p^3, donde p es un número primo.

3.7. Problema. Enumerar y clasificar quandles conexos de tamaño pq, donde p, q son primos.

3.8. Problema. ¿Es cierto que siempre existe un quandle conexos de tamaño $2k+2$?

3.9. Problema. Enumerar y construir quandles conexos de tamaño $2k+2$.

4. Extensiones

4.1. Vamos a definir extensiones de pecios y quandles. Sean A un grupo abeliano (escrito aditivamente), X un pecio y $f\colon X\times X\to A$ una función. Sobre el conjunto $X\times A$ definimos la operación

$$(x,a)\triangleright(y,b)=(x\triangleright y, b+f(x,y)) \tag{4.1.1}$$

para todo $(x,a),(y,b)\in X\times A$. Puede demostrarse que (4.1.1) define una estructura de pecio sobre $X\times A$ si y sólo si f cumple

$$f(x,z)+f(x\triangleright y, x\triangleright z)=f(y,z)+f(x,y\triangleright z) \tag{4.1.2}$$

para todo $x,y,z\in X$.

Como ejemplo, demostremos la distributividad. Sean $x,y,z\in X$ y $a,b,c\in A$. Un cálculo directo nos dice que

$$\begin{aligned}(x,a)\triangleright((y,b)\triangleright(c,z)) &= (x,a)\triangleright(y\triangleright z, c+f(y,z))\\ &= (x\triangleright(y\triangleright z), c+f(y,z)+f(x,y\triangleright z)),\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}&((x,a)\triangleright(y,b))\triangleright((x,a)\triangleright(c,z))\\ &\qquad= (x\triangleright y, b+f(x,y))\triangleright(x\triangleright z, c+f(x,z))\\ &\qquad= ((x\triangleright y)\triangleright(x\triangleright z)), c+f(x,z)+f(x\triangleright y, x\triangleright z)).\end{aligned}$$

4.2. Se define el conjunto $Z^2(X,A)$ de 2-cociclos con valores en A como el conjunto de funciones $f\colon X\times X\to A$ que verifican (4.1.2) para todo $x,y,z\in X$.

4.3. El pecio obtenido en 4.1 se llama **extensión abeliana** de X por el grupo abeliano A y el 2-cociclo f, y se denota por $X\times_f A$.

4.4. Ejercicio. Sean X un quandle y A un grupo abeliano. Demuestre que la operación (4.1.1) define una estructura de quandle sobre $X\times A$ si y sólo si $f\in Z^2(X,A)$ y $f(x,x)=0$ para todo $x\in X$. Las $f\in Z^2(X,A)$ tales que $f(x,x)=0$ para todo $x\in X$ se conocen como 2-cociclos de quandles.

4.5. Ejemplo. Sea $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ con la estructura de quandle dada por las permutaciones

$$\varphi_{x_1}=(x_2x_3x_4),\quad \varphi_{x_2}=(x_1x_4x_3),\quad \varphi_{x_3}=(x_1x_2x_4),\quad \varphi_{x_4}=(x_1x_3x_2).$$

Sea $A = \{0, 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$ y sea $f\colon X \times X \to A$ la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = x_1 \text{ o } y = x_1 \text{ o } x = y, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $f \in Z^2(X, A)$.

4.6. Ejercicio. Sea $Y = X \times \{0, 1\}$ el quandle dado por

$$(x, i) \triangleright (y, j) = (x \triangleright y, j + f(x, y)), \quad x, y \in X,\ i, j \in \{0, 1\},$$

donde X es el quandle del ejemplo 4.5. Demuestre que la aplicación canónica $Y \to G_Y$ no es inyectiva. ¿Es Y un quandle de conjugación?

4.7. Ejemplo. Sea X el quandle $(1234)^{\mathbb{S}_4}$ y sea $A = \{0, 1, 2, 3\} \simeq \mathbb{Z}/4$. La función $f\colon X \times X \to A$ dada por la tabla

f	(1234)	(1432)	(1342)	(1243)	(1324)	(1423)
(1234)	0	1	2	2	1	3
(1432)	1	0	2	0	3	3
(1342)	2	1	0	1	2	3
(1243)	3	2	1	0	0	3
(1324)	1	1	1	1	0	1
(1423)	0	0	0	0	1	0

es un 2-cociclo de X con coeficientes en A.

4.8. Sean X un pecio y A un grupo abeliano. Se dice que un 2-cociclo $f\colon X \times X \to A$ es un **coborde** si existe una función $\gamma\colon X \to A$ tal que

$$f(x, y) = \gamma(x \triangleright y) - \gamma(y)$$

para todo $x, y \in X$. Diremos que dos 2-cociclos f y g son **cohomólogos** si existe $\gamma\colon X \to A$ tal que

$$f(x, y) = \gamma(x \triangleright y) + g(x, y) - \gamma(y)$$

para todo $x, y \in X$.

4.9. Sea X un pecio y sea A un grupo abeliano. Una **extensión** de X por A se define como un par $(Y \xrightarrow{p} X, A)$, donde $p\colon Y \to X$ es un morfismo de pecios sobreyectivo y existe una acción $A \times Y \to Y$, $(\lambda, y) \mapsto \lambda y$, de A en Y tal que A actúa regularmente en cada fibra $p^{-1}(x)$, y valen las siguientes propiedades:

(4.9.1) $\quad p(y_1) = p(y_2) \implies \varphi_{y_1} = \varphi_{y_2} \quad$ para todo $y_1, y_2 \in Y$,

(4.9.2) $\quad \lambda y \triangleright z = y \triangleright z,\ \lambda(y \triangleright z) = y \triangleright (\lambda z) \quad$ para todo $\lambda \in A,\ y, z \in Y$.

Recordemos que un grupo A **actúa regularmente** en un conjunto Y si dados $y, z \in Y$ existe un único $\lambda \in A$ tal que $\lambda y = z$.

Ejemplo. Sea X un pecio, A un grupo abeliano y $f \in Z^2(X, A)$. Entonces A actúa en $X \times_f A$ vía

$$\lambda(x, a) = (x, \lambda + a), \quad \lambda, a \in A,\ x \in X.$$

La función $p\colon X \times_f A \to X$, $(x, a) \mapsto x$, es un morfismo sobreyectivo de pecios y A actúa regularmente en cada fibra $p^{-1}(x)$. Queda como ejercicio verificar que el par $(X \times_f A \to X, A)$ es una extensión de X por A.

Diremos que las extensiones $(Y \xrightarrow{p} X, A)$ y $(Y_1 \xrightarrow{p_1} X, A)$ de X por el grupo abeliano A son **equivalentes**,

$$(Y \xrightarrow{p} X, A) \simeq (Y_1 \xrightarrow{p_1} X, A),$$

si existe un morfismo $F\colon Y \to Y_1$ de pecios tal que $p = p_1 \circ F$ y para todo $\lambda \in A$, $y \in Y$ se cumple $F(\lambda y) = \lambda F(y)$.

Ejercicio. Sea X un pecio finito y sea $(Y \xrightarrow{p} X, A)$ una extensión de X. Demuestre que cada sección conjuntista $s\colon X \to Y$ de p induce un 2-cociclo $f \in Z^2(X, A)$ tal que

$$f(x_1, x_2) + s(x_1 \triangleright x_2) = s(x_1) \triangleright s(x_2), \quad x_1, x_2 \in X.$$

Más aún, si $s_1\colon Y \to X$ es otra sección y $f_1 \in Z^2(X, A)$ es su 2-cociclo asociado entonces f y f_1 son cohomólogos.

Veamos que toda extensión $(Y \xrightarrow{p} X, A)$ es equivalente a una extensión de la forma $(X \times_f A \xrightarrow{p_X} X, A)$, donde $p_X\colon X \times_f A \to X$, $(x, a) \mapsto x$, para algún $f \in Z^2(X, A)$. Sea $s\colon X \to Y$ una sección conjuntista para $p\colon Y \to X$, es decir: $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Por el ejercicio anterior sabemos que s induce un 2-cociclo $f \in Z^2(X, A)$.

Afirmación. La función $F\colon X \times_f A \to Y$, $(x, a) \mapsto as(x)$, es una equivalencia de extensiones.

Veamos que F es sobreyectiva: si $y \in Y$ existe un único $a \in A$ tal que $asp(y) = y$ y luego $F(p(y), a) = y$. Para demostrar que F es inyectiva basta ver que si $as(x) = a_1 s(x_1)$ entonces $x = x_1$: como A actúa transitivamente en cada $p^{-1}(x)$,

$$x = p(s(x)) = p(as(x)) = p(a_1 s(x_1)) = ps(x_1) = x_1.$$

Dejamos como ejercicio demostrar que

$$p_X \circ F = p, \quad F((x, \lambda + a)) = \lambda F(x, a)$$

para todo $\lambda, a \in A$, $x \in X$, y que F es morfismo de pecios.

Afirmación. Sean $f, g \in Z^2(X, A)$. Entonces

$$(X \times_f A \to X, A) \simeq (X \times_g A \to X, A)$$

si y sólo si f y g son cohomólogos.

Veamos cómo demostrar la afirmación anterior. Si F es una equivalencia de extensiones, la función $\gamma\colon X \to A$, $\gamma(x) = p_A(F(x, 0))$, donde $p_A\colon X \times A \to A$, $(x, a) \mapsto a$, permite demostrar que f y g son cohomólogos. Recíprocamente, si f y g son cohomólogos existe una función $\gamma\colon X \to A$ tal que $\gamma(y) - \gamma(x \triangleright y) = (f - g)(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Luego $F\colon X \times_f A \to X \times_g A$, $(x, a) \mapsto (x, a + \gamma(x))$, es una equivalencia de extensiones.

4.10. Un quandle X se dice **involutivo** si para cada $x \in X$ la permutación φ_x es una involución, es decir: $x \triangleright (x \triangleright y) = y$ para todo $x, y \in X$. Ejemplo: Si G es un grupo entonces $\mathrm{Core}(G)$ es involutivo; en particular los quandles diedrales son involutivos.

Conjetura. *Sea* X *un quandle involutivo y conexo, sea* A *un grupo abeliano y sea* $f \in Z^2(X, A)$ *tal que* $f(x, x) = 0$ *para todo* $x \in X$*. Entonces* $X \times_f A$ *es un quandle involutivo.*

5. Homología de pecios

5.1. Sea X un pecio. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea $C_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}X^n$. Definimos $\partial_{n+1} : C_{n+1}(X, \mathbb{Z}) \to C_n(X, \mathbb{Z})$ como $\partial_0 = \partial_1 = 0$ y

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [&(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &- (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \triangleright x_{i+1}, \dots, x_i \triangleright x_{n+1})]\end{aligned}$$

si $n \geqslant 1$.

5.2. Ejercicio. Demuestre que $\{(C_n(X, \mathbb{Z}), \partial_n)\}$ es un complejo.

5.3. Sea X un pecio. Los elementos de $C_n(X)$ se denominan n-cadenas, los elementos de $\ker \partial_n$ son los n-ciclos y los elementos de $\mathrm{im} \partial_{n+1}$ son los n-bordes. La **homología** $H_*(X, \mathbb{Z})$ de X es la homología del complejo $C_*(X, \mathbb{Z})$. Más precisamente, se define el n-ésimo **grupo de homología** de X como

$$H_n(X, \mathbb{Z}) = Z_n(X, \mathbb{Z})/B_n(X, \mathbb{Z}),$$

donde $Z_n(X, \mathbb{Z}) = \ker \partial_n$ y $B_n(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{im}\, \partial_{n+1}$.

5.4. Notación. *Escribiremos* $C_n(X) = C_n(X, \mathbb{Z})$ *y* $H_n(X) = H_n(X, \mathbb{Z})$.

5.5. Ejercicio. Sea X un pecio finito. Demuestre que $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}^m$, donde m es la cantidad de órbitas que tiene la acción de $\mathrm{Inn}(X)$ en X.

5.6. Ejemplo. Sea p un número primo y sea X un quandle conexo de p elementos. Entonces $H_2(X) \simeq \mathbb{Z}$, ver por ejemplo [**5**, Lemma 5.1].

5.7. La cohomología de un pecio X se define como la cohomología del complejo de cocadenas $\{C^n(X), d_n\}$, donde

$$C^n(X) = \mathrm{Fun}(X^n, \mathbb{Z})$$

y $d_n \colon C^n(X) \to C^{n+1}(X)$ está dada por

$$\begin{aligned}(d_n f)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [&f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &- f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \triangleright x_{i+1}, \dots, x_i \triangleright x_{n+1})].\end{aligned}$$

Los elementos of $C^n(X)$ se denominan n-cocadenas, los elementos de $\ker d_n$ son los n-cociclos y los elementos de $\mathrm{im}\, d_{n+1}$ son los n-cobordes. Se define el n-ésimo **grupo de cohomología** de X como

$$H^n(X) = Z^n(X)/B^n(X),$$

donde $Z^n(X) = \ker d_n$ and $B^n(X) = \mathrm{im}\, d_{n+1}$.

5.8. Sea A un grupo abeliano. Si al complejo $\{C_n(X), \partial_n\}$ le aplicamos los funtores $-\otimes A$ y $\hom_{\mathbb{Z}}(-, A)$ obtenemos complejos con coeficientes en A. La homología de X con coeficientes en A es la homología de

$$C_n(X, A) = C_n(X) \otimes A,$$

con bordes

$$\begin{aligned}\partial_n((x_1, \dots, x_{n+1}) \otimes a) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [&(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \otimes a \\ &- (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \triangleright x_{i+1}, \dots, x_i \triangleright x_{n+1}) \otimes a]\end{aligned}$$

Similarmente, la cohomología de X con coeficientes en A es la cohomología del complejo

$$C^n(X, A) = \hom_{\mathbb{Z}}(C_n(X), A) \simeq \mathrm{Fun}(X^n, A)$$

con cobordes

$$\begin{aligned}(d_n f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [&f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &- f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \triangleright x_{i+1}, \dots, x_i \triangleright x_{n+1})].\end{aligned}$$

5.9. Ejemplos. Sea X un pecio y sea A un grupo abeliano. Entonces el conjunto de 1-cociclos de X con valores en A es

$$Z^1(X, A) = \{\gamma\colon X \to A : \gamma(x \triangleright y) = \gamma(y),\ \forall x, y \in X\}.$$

Similarmente, un cálculo directo muestra que el conjunto $Z^2(X, A)$ de 2-cociclos con valores en A es el conjunto de funciones $\alpha\colon X \times X \to A$ que verifican

$$\alpha(x, y \triangleright z) + \alpha(y, z) = \alpha(x \triangleright y, x \triangleright z) + \alpha(x, z)$$

para todo $x, y, z \in X$.

5.10. Proposición. *Las sucesiones*

$$0 \to H_n(X) \otimes A \to H_n(X, A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), A) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), A) \otimes H^n(X, A) \to \hom_{\mathbb{Z}}(H_n(X), A) \to 0,$$

son exactas y se parten.

Demostración. Como $\{C_n(X), \partial_n\}$ es un complejo de grupos abelianos libres, el resultado se sigue del teorema de los coeficientes universales, ver por ejemplo [**8**, §56]. $\square$

5.11. Ejercicio. Demuestre que si $H_{n-1}(X)$ no tiene torsión entonces $H_n(X, A) = H_n(X) \otimes A$. Esta igualdad es válida también en el caso en que A no tenga torsión.

5.12. Ejercicio. Demuestre que si $H_{n-1}(X)$ es libre o el grupo A es divisible entonces $H^n(X, A) \simeq \hom_{\mathbb{Z}}(H_n(X), A)$.

5.13. Ejercicio. Sea X un pecio y A un grupo abeliano. Demuestre que las clases de equivalencia extensiones de X por A están en correspondencia biyectiva con los elementos de $H^2(X, A)$.

5.14. Teorema (Etingof–Graña). *Sea* X *un pecio conexo y finito y sea* A *un grupo abeliano con una acción trivial de* G_X. *Entonces*

$$H^1(G_X, \mathrm{Fun}(X,A)) \simeq H^2(X,A),$$

donde $\mathrm{Fun}(X,A)$ *es un* G_X*-módulo a izquierda trivial y la acción a derecha está dada por* $(f \cdot x)(y) = f(x \triangleright y)$.

Demostración. Si $f \in H^1(G_X, \mathrm{Fun}(X,A))$ entonces $q^f(x,y) = f(x)(y)$, donde $x, y \in X$, define un 2-cociclo $q^f \in H^2(X,A)$. Recíprocamente, cada $q \in H^2(X,A)$ determina un 1-cociclo $f_q \in H^1(G_X, \mathrm{Fun}(X,A))$ al extender q recursivamente vía $f_q(xy)(z) = q(x, y \triangleright z) + q(y,z)$, donde $x, y, z \in X$. Para más detalles ver [**1**, Lemma 4.10]. □

Referencias

[1] N. Andruskiewitsch and M. Graña. From racks to pointed Hopf algebras. *Adv. Math.*, 178(2):177–243, 2003.

[2] E. Brieskorn. Automorphic sets and braids and singularities. In *Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, volume 78 of *Contemp. Math.*, pages 45–115. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[3] P. Etingof, A. Soloviev, and R. Guralnick. Indecomposable set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation on a set with a prime number of elements. *J. Algebra*, 242(2):709–719, 2001.

[4] R. Fenn and C. Rourke. Racks and links in codimension two. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(4):343–406, 1992.

[5] M. Graña. Indecomposable racks of order p^2. *Beiträge Algebra Geom.*, 45(2):665–676, 2004.

[6] A. Hulpke, D. Stanovský, and P. Vojtěchovský. Connected quandles and transitive groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 220(2):735–758, 2016.

[7] D. Joyce. Simple quandles. *J. Algebra*, 79(2):307–318, 1982.

[8] J. R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[9] J. J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995.

[10] L. Vendramin. On the classification of quandles of low order. *J. Knot Theory Ramifications*, 21(9):1250088, 10, 2012.